平成２９年度　冬期課外講習　２年数学（応用）

テーマ　「『ジグソー法』で三角関数分野の入試問題にチャレンジしよう」
ねらい　三角関数についての諸知識を統合して活用できるようにする
・２倍角の公式による２θと「２次」の互換性について理解する
・式中のｓｉｎθとｃｏｓθは，三角関数の合成によりｓｉｎ（$\theta+\alpha$）に統合して扱えることを理解する
・角が取る範囲に注意して，三角方程式，不等式を解くことができる
参加者　２学年生徒８名
文理系を分けず応用コースを選択した生徒であり，学習意欲は高く普段の授業への取り組みも良好である。基礎的な計算の技能はあるが，数学的な思考に長けているとは言えず，１ヶ月程前に学んだ三角関数の新出事項が定着していない事が考えられる。
期　間　１２月２６日（火），２７（水），２８（木）の３日間
時　間　１コマ６０分

指導の流れ
１日目
①今日の活動の説明
８人の受講生を，問題Ａ，Ｂの２題を用意してそれぞれを担当する２班に分け，さらにＡ，ＢをＡ－１～４，Ｂ－１～４に分ける（エキスパート課題）ことを説明する。くじ引き形式により各々の担当を決める。
②既習事項と取り組む問題の確認
Ａ，Ｂそれぞれで班を作り（机を寄せる），問題を精読して関連するであろう既習事項を挙げさせる。例えばＡ問題では「６ｓｉｎθｃｏｓθ」は「３×２ｓｉｎθｃｏｓθ」であることを示して，２倍角の公式の導出を促したり「ｆ（θ）＜$3+\sqrt{3}$」の不等号に注目させ，三角不等式について確認するよう誘導したりする。
③ ②で挙げられたことを念頭に各自Ａ－１～４，Ｂ－１～４の課題に取り組む。自分の課題が終了した生徒へは，元の問題ＡまたはＢにまずは１人で取り組むよう指示する。
④各自の課題が済んだところを見計らって，グループで問題ＡまたはＢに取り組ませる。この際，Ａ－１～４，Ｂ－１～４をそれぞれ順番に記載していけば解答の骨格はできるが，それぞれのパーツのつながりを捉え，解答として説明の不足があれば補って完成させ理解を深めることを指摘する。
２日目
①今日の活動の説明
グループを組み替える。Ａ，Ｂ－１，２を１班，Ａ，Ｂ－３，４を１班にして，問題Ａ，Ｂを教え合うことを説明する。
②与えられた模範解答をそのまま見せても相手の理解にはつながらないことを示し，聞く側の質問する力が「教え合い」の成否に影響することを指摘しておく。聞く側の「持つ知識」にも注意させる。

③援助しながら「教え合い」を進めさせる。アイデア（別解）や工夫した説明，適切な質問は支持する。

３日目

①今日の活動の説明

　問題Ａ，Ｂに２問加えたテスト形式の演習を行うことを説明する。

②問題Ａ，Ｂの解法を各自で振り替えさせる。

③ねらい　三角関数についての諸知識を統合して活用できるようにする

- ２倍角の公式による２θと「２次」の互換性について理解する
- 式中のｓｉｎθとｃｏｓθは，三角関数の合成によりｓｉｎ（θ＋α）に統合して扱えることを理解する
- 角が取る範囲に注意して，三角方程式，不等式を解くことができる

　を教員から解説し，Ａ，Ｂに加えた２問を解く上で活用できることを指摘する。

④演習に取り組ませる。

⑤２学年末で取り組む内容としては難易度が高いが，今後の学習形態を先取りした講習であったことを説明し，高難位の問題でも平易なレベルに分割して取り組むことができることを指摘して，講習のまとめとする。

実施して

　意図した活動をさせることはできたが，理解の深化につながったかは確信が持てない生徒の状況であった。用意した課題に取り組むには，授業の学習内容の定着が不十分で時間が予定よりもかかってしまった。教え合いをしている内に理解に混乱が生じたり，主題とは関係のない簡単な計算にミスが出たりした。解答作成上で，分けたパーツ（エキスパート課題）を合成して使う部分には苦労していた。担当する問題Ａ，Ｂを解くだけではなく，理解のための時間を十分に取るか，教員による再解説が必要であったかもしれない。

　生徒が現在保持している知識の内容と質，および数学に関する語彙も含めた説明する力や聞く力への見立てが十分ではなかったのが反省点であり，教員によるリサーチと生徒自身のモニタリングにつながる活動を入れた構成にすべきであった。

　参加生徒の全員が来年度の受験で数学を使用するということであり，今後の学習活動に見通しを持たせることができたのは収穫であった。

以下，使用した教材。数研出版「数学Ⅰ・Ａ＋Ⅱ・Ｂ　標準演習ＰＬＡＮ１００」を元に作成

$\boxed{\text{A}}$　$f(\theta)=6\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta$ とおく。ただし $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする

$f(\theta)<3+\sqrt{3}$ をみたす θ の範囲を求めよ

よって求める θ の範囲は　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{A}}$－１ｚ（正弦，余弦の加法定理　正弦，余弦の２倍角の公式）

Ⅰ　空欄を埋めよ

ｓｉｎ（α＋β）＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ｓｉｎ（α－β）＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ｃｏｓ（α＋β）＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ｃｏｓ（α－β）＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Ⅱ　空欄を埋めよ

ｓｉｎ２α＝ｓｉｎ（＿＿＋＿＿）＝ｓｉｎ＿＿ｃｏｓ＿＿＋ｃｏｓ＿＿ｓｉｎ＿＿

＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ｃｏｓ２α＝ｃｏｓ（＿＿＋＿＿）＝ｃｏｓ＿＿ｃｏｓ＿＿－ｓｉｎ＿＿ｓｉｎ＿＿

＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＝ ｛

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（サインのみを用いて）

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（コサインのみを用いて）

Ⅲ　２倍角の公式を用いて，ｆ（θ）　をｓｉｎ２θ，ｃｏｓ２θ　を用いて表せ

$\boxed{\text{A}}$－２ｚ（三角関数の合成）

Ⅰ　空欄を埋めよ

$a\sin\theta+b\cos\theta=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ $(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=$ ＿＿＿＿＿＿，$\sin\alpha=$ ＿＿＿＿＿＿

Ⅱ　次の式を　$r\sin(\theta+\alpha)$ または　$r\sin(2\theta+\alpha)$　の形に表せ。
ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする

（１）$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

（２）$\sin\theta-\cos\theta$

（３）$\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta$

Ⅲ　三角関数の合成を用いて，$f(\theta)=3\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}$ を
$\sin(2\theta+\alpha)$ を用いて表せ（αの値も求めよ）

$\boxed{\text{A}}$－３ｚ（三角方程式　三角不等式）

Ⅰ　次の方程式を解け。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする

（１）$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

（２）$2\sqrt{3}\sin\theta = 3$

Ⅱ　次の不等式を解け

（１）$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

（２）$0 \leqq X < 2\pi$ のとき，$\sin X < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ⅲ　$\dfrac{\pi}{6} \leqq X \leqq \dfrac{7}{6}\pi$ のとき，$2\sqrt{3}\sin X < 3$ をみたす X の範囲を求めよ

$\boxed{\text{A}}$－４ｚ（不等式が示す角の範囲）

Ⅰ　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，以下の θ の式がとる値の範囲を答え，さらにその範囲を座標平面上に図示せよ

（１）2θ　　（２）$2\theta + \frac{\pi}{6}$

Ⅱ　以下の不等式が示す角 X の範囲を，座標平面上に図示せよ

（１）$\frac{\pi}{6} \leqq X < \frac{\pi}{3}$　　（２）$\frac{2}{3}\pi < X \leqq \frac{7}{6}\pi$

Ⅲ　以下の不等式をみたす θ の範囲を，それぞれ答えよ

（１）$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$　　（２）$\frac{2}{3}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{7}{6}\pi$

$\boxed{\text{B}}$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta - 2$ の最大値と最小値，およびそのときの θ を求めよ。

以上より，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとり，$\theta = \dfrac{11}{12}\pi$，$\dfrac{19}{12}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる

$\boxed{\text{B}}$－１ｚ（三角関数の相互関係）

Ⅰ　空欄を埋めよ

ｔａｎθ＝＿＿＿＿＿＿＿，　ｓｉｎ$^2\theta$＋ｃｏｓ$^2\theta$＝＿＿＿

１＋ｔａｎ$^2\theta$＝＿＿＿＿＿＿＿

Ⅱ　ｓｉｎθ＋ｃｏｓθ＝ $\frac{1}{2}$ のとき，ｓｉｎθｃｏｓθ の値を求めよ

Ⅲ　ｘ＝ｓｉｎθ＋ｃｏｓθ とおくとき，２ｓｉｎθｃｏｓθ を ｘ を用いた式で表せ

Ⅳ　２倍角の公式「ｓｉｎ２θ＝２ｓｉｎθｃｏｓθ」を用いて，ｆ（θ） を ｘ を用いた式で表せ

$\boxed{\text{B}}$－２ｚ（三角関数の合成）

Ⅰ　空欄を埋めよ

ａｓｉｎθ＋ｂｃｏｓθ＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（θ＋α）

ただし　ｃｏｓα＝＿＿＿＿＿＿，ｓｉｎα＝＿＿＿＿＿＿

Ⅱ　次の式を　ｒｓｉｎ（θ＋α）　の形に表せ。ただし，ｒ＞０，$-\pi<\alpha<\pi$　とする

（１）$\sqrt{3}$ｓｉｎθ＋ｃｏｓθ

（２）ｓｉｎθ－ｃｏｓθ

（３）ｓｉｎθ＋$\sqrt{3}$ｃｏｓθ

Ⅲ　「$0\leqq\theta<2\pi$のとき　$-1\leqq$ｓｉｎ$\theta\leqq1$」であることを用いて，ｘ＝ｓｉｎθ＋ｃｏｓθ　のとる値の範囲を求めよ

$\boxed{\text{B}}$－３ｚ（２次関数の最大･最小）

Ⅰ　$y=x^2+\sqrt{2}x-3$ を平方完成し，その頂点の座標を答えよ

Ⅱ　$y=x^2+\sqrt{2}x-3$ のグラフを描け。ただし，定義域は $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ とする

Ⅲ　$y=x^2+\sqrt{2}x-3$　$(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ

$\boxed{\text{B}}$－４ｚ（三角方程式）

Ⅰ　以下をみたす θ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする

（１）$\sin\theta = 1$　　　　（２）$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$

Ⅱ　以下をみたす X を求めよ。ただし，$\dfrac{\pi}{4} \leqq X < \dfrac{9}{4}\pi$ とする

（１）$\sin X = 1$　　　　（２）$\sin X = -\dfrac{1}{2}$

Ⅲ　以下をみたす θ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする

（１）$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$　　　　（２）$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

確認テスト

Ⅰ　$f(\theta)=6\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta$ とおく。ただし $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする

$f(\theta)<3+\sqrt{3}$ をみたす θ の範囲を求めよ

Ⅱ　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2$ の最大値と最小値，およびそのときの θ を求めよ。

Ⅲ　$0<\theta<\pi$ とする。ｘ の２次方程式

$$x^2+2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)x+(2+\sqrt{2})=0 \cdots ①$$

が異なる２つの実数解を持つようなθの値の範囲を以下に従って求めよ。

（１）①の判別式をＤとしてＤまたは $\frac{D}{4}$ を$\sin 2\theta$と$\cos 2\theta$を用いて表せ。

（２）$D>0$ または $\frac{D}{4}>0$ を変形して　$\sin(\boxed{})>\boxed{}$ …②　の形で表せ。

（３）②を解くことで，①が異なる２つの実数解を持つようなθの値の範囲を求めよ。

Ⅳ　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$　とする。関数　$f(\theta)=3\cos 2\theta+4\cos\theta+7$　の最大値，最小値を以下に従って求めよ。

（１）　$\cos\theta=t$　とおく。t　の取りうる値の範囲を求めよ。

（２）　$\cos 2\theta$　を　t　を用いた２次式で表せ。

（３）　$y=f(\theta)$　とおいて，y　を　t　の２次式で表し，（１）で求めた　t　の値の範囲に注意してその最大値と最小値を求めよ。